Integralregning (Matematik B)

Stamfunktioner og ubestemte integraler

Definition 1
Funktionen *F* kaldes en stamfunktion til funktionen *f* hvis $F'(x) = f(x)$, man skriver også dette som: $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Bemærk: Alle kontinuerte funktioner har en stamfunktion.

Alle kontinuerte funktioner har en stamfunktion.

$F(x) = \int f(x)\,dx$ kaldes det ubestemte integral af *f*.

Sammenhængen mellem en funktion *f* og dens stamfunktion *F* kaldes integrationsprøven:

$F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$. Dette kan også skrives som: $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

Eksempel 1: $F(x) = x^2$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x$ eftersom $F'(x) = 2x$, men $F_1(x) = x^2 + 4$ er også en stamfunktion til $f(x) = 2x$ da $F_1'(x) = (x^2+4)' = (x^2)' + (4)' = 2x + 0 = 2x$.

Sætning 1
Hvis *F* er en stamfunktion til *f*, så er alle funktioner på formen: $F + k$, hvor *k* er en konstant, stamfunktioner til *f*.

Bevis:

Da *F* er en stamfunktion til *f* ved vi, at $F'(x) = f(x)$. Fra differentialregningen ved vi, at man differentierer en sum ved at differentiere hvert led for sig, og at en konstant differentieret giver nul. Følgelig får vi, at $(F+k)'(x) = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$.

Da $(F+k)'(x) = f(x)$ er $F+k$ en stamfunktion til *f* ifølge definitionen ovenfor. □

<u>**Sætning 2**</u>
Lad *F* være en stamfunktion til *f*. Så gælder, at enhver anden stamfunktion F_1 til *f* kan skrives på formen: $F_1(x) = F(x) + k$.

<u>**Bevis:**</u>

Da både *F* og F_1 er stamfunktioner til *f*, ved vi at $F_1'(x) = f(x)$ og $F'(x) = f(x)$.

Vi har dermed, at $F_1'(x) = F'(x) \Leftrightarrow F_1'(x) - F'(x) = 0 \Leftrightarrow (F_1 - F)'(x) = 0$, hvor

sidste led følger af regnereglen om differentiation af en differens. Da funktionen $F_1 - F$

differentieret giver nul i ethvert punkt må funktionen være konstant, dvs. $(F_1 - F)(x) = k$.

Dette udtryk kan omskrives: $(F_1 - F)(x) = k \Leftrightarrow F_1(x) - F(x) = k \Leftrightarrow F_1(x) = F(x) + k$. □

Vil man bestemme samtlige stamfunktioner til en funktion *f* kan man, som følge af ovenstående sætning, blot bestemme en vilkårlig stamfunktion til *f* og addere en konstant: $F(x) = \int f(x)\,dx + k$

Regneregler for ubestemte integraler

Følgende skema kan benyttes til at bestemme stamfunktioner/ubestemte integraler:

$f(x)$	x^n, hvor $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	k	$\sqrt{x}$	e^x	$e^{k \cdot x}$	a^x	$\ln(x)$
$F(x)$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$k \cdot x$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x}$	e^x	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$x \cdot \ln(x) - x$

På B-niveau ser vi kun på tre regneregler for ubestemte integraler:

Sætning 3

1) $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2) $\int f(x)-g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
3) $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)\,dx$, hvor *k* er en konstant.

Vi gemmer beviset til A-niveau.

Eksempel 2: $\int x^2+\frac{1}{x}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \tfrac{1}{3}x^3+\ln(x)+k,\quad k\in R.$

Eksempel 3: $\int 2x^3dx = 2\int x^3\,dx = 2\cdot\tfrac{1}{4}x^4+k = \tfrac{1}{2}x^4+k,\ \ k\in R.$

Det bestemte integral

Det ***ubestemte*** integral er en funktion, som vi skal se i det følgende, er det ***bestemte*** integral et tal.

Definition 2
Ved det bestemte integral af *f* i intervallet $[a,b]$ forstås tallet: $F(b)-F(a)$, hvor *F* er en vilkårlig stamfunktion til *f*. Dette skrives også som: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Eksempel 4: $\int_1^2 x\,dx = \int_1^2 x^1dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 2^2-\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$

Areal 1

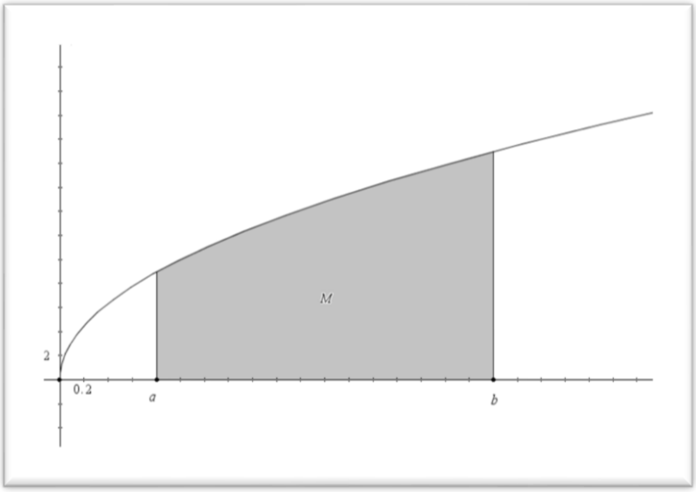
Sætning 4

Lad *f* være kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a,b]$.

Så er $\int_a^b f(x)\,dx$ arealet af punktmængden $M = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$.

Bevises på A-niveau.

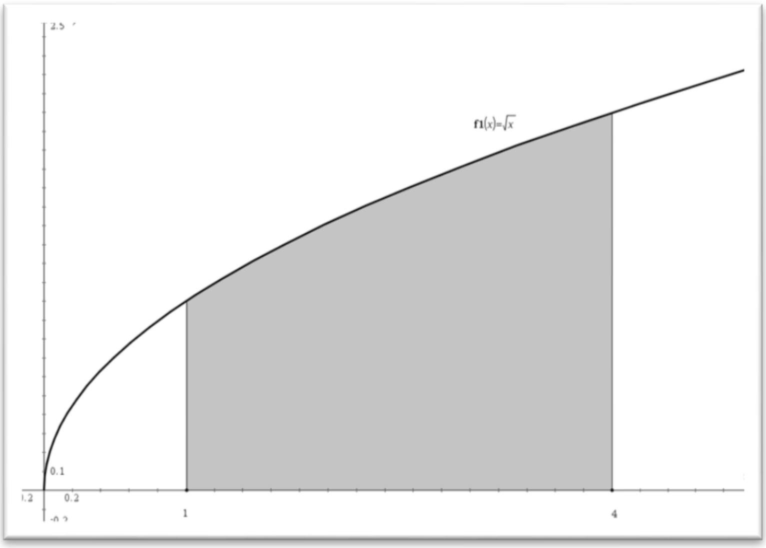
Punktmængden $M = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ er området mellem grafen for *f* og *x*-aksen i intervallet $[a,b]$ (se figur 1).



Figur 1.

Eksempel 5: Arealet *A* af området mellem grafen for $f(x) = \sqrt{x}$ og *x*-aksen i intervallet $[1,4]$ (se figur 2) ønskes bestemt. Vi skal bestemme arealet af punktmængden: $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

Sætning 4 giver, at arealet er: $A = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \left[\tfrac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_1^4 = \tfrac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{3} = \underline{\underline{\tfrac{14}{3}}}$



Figur 2.

Regneregler for bestemte integraler

På B-niveau ser vi også kun på tre regneregler for bestemte integraler:

Sætning 5

1) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2) $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
3) $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, hvor k er en konstant.

Vi gemmer beviset til A-niveau.

Eksempel 6: $\int_0^4 2x-\sqrt{x}\,dx = 2\cdot\int_0^4 x^1 dx - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx =$

$$2\cdot\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4 - \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 =$$

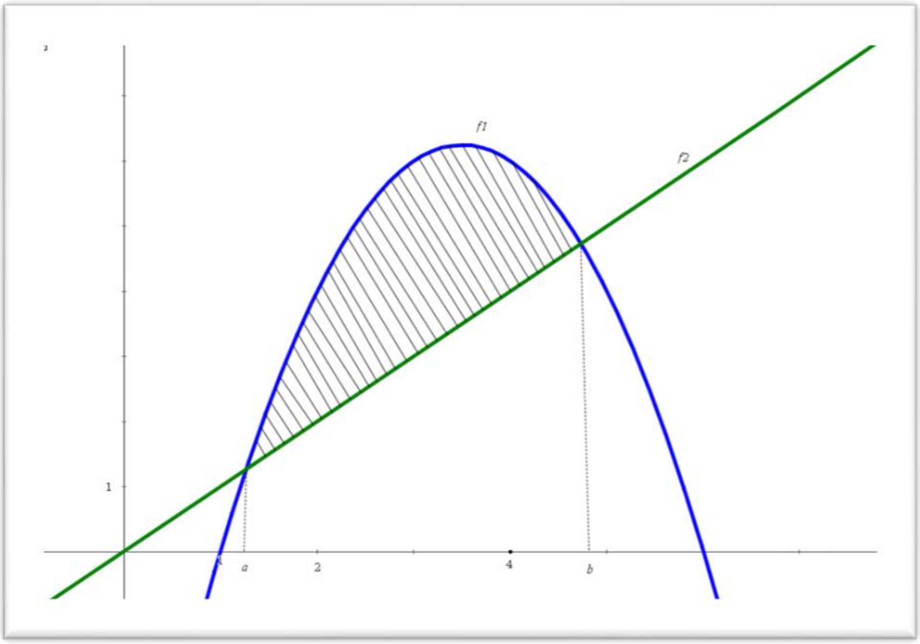
$$2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right) - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} - \tfrac{2}{3}\cdot 0\cdot\sqrt{0}\right) =$$

$$2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 16 - 0\right) - \left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 0\right) =$$

$$2\cdot 8 - \tfrac{16}{3} = \underline{\underline{\tfrac{32}{3}}}$$

Areal 2

Arealet mellem to grafer, som f. eks. det skraverede område på figur 3, kan også bestemmes vha. integralregning.



Figur 3.

Området afgrænset af de to grafer, på figur 3, svarer til punktmængden $\{(x,y)\,|\,a \le x \le b \wedge f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$.

Bemærk: På figuren er *a* og *b* tegnet som *x*-koordinaterne til skæringspunkterne mellem de to grafer, sætningen som skal hjælpe os med at bestemme arealer af områder afgrænset af to grafer, kræver ikke dette.

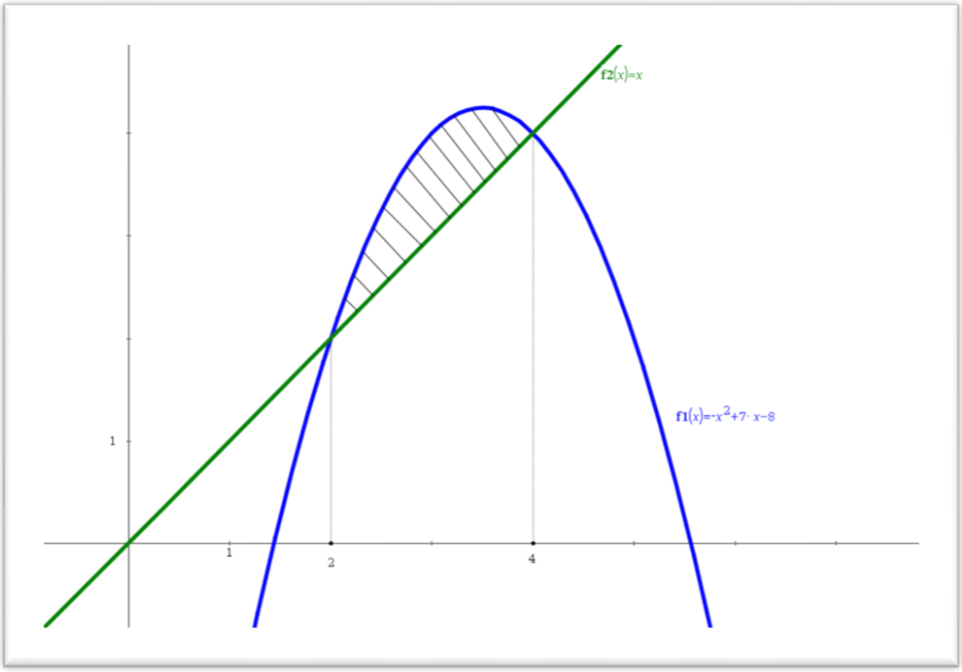
Sætning 6

Lad funktionerne *f* og *g* være kontinuerte i intervallet $[a,b]$ og antag, at $f(x) \ge g(x)$ for alle $x \in [a,b]$. Så gælder, at arealet af punktmængden $M = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le f(x)\}$ er givet ved:

$$A(M) = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Vi gemmer beviset til A-niveau.

Eksempel 7: Arealet *A* af området mellem grafen for $f_1(x) = -x^2 + 7x - 8$ og grafen for $f_2(x) = x$ (se figur 4) ønskes bestemt. Vi skal bestemme arealet af punktmængden: $\{(x,y) \mid a \le x \le b \wedge f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$, hvor *a* og *b* er *x*-koordinaterne til skæringspunkterne mellem de to grafer.



Figur 4.

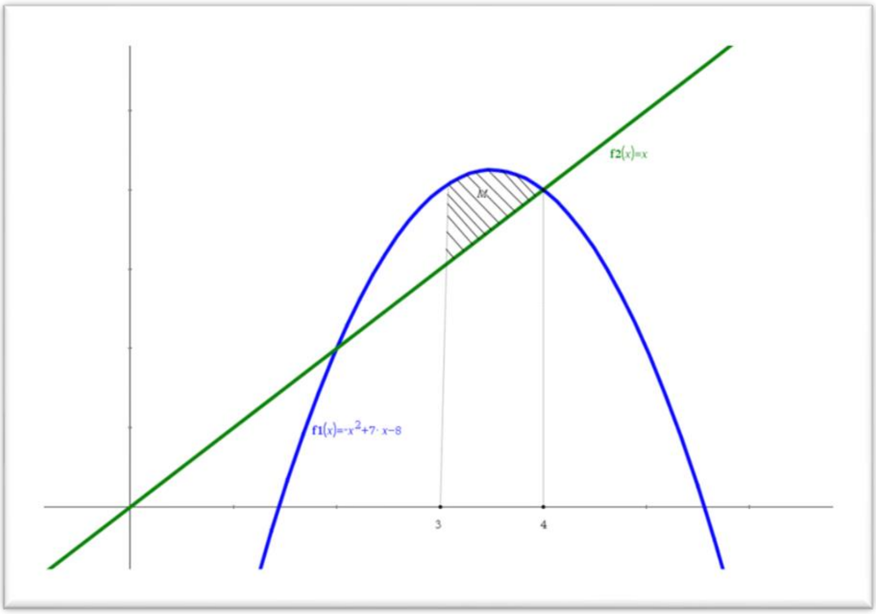
Først bestemmes *x*-koordinaterne til skæringspunkterne mellem de to grafer. Dette gøres ved at løse ligningen: $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 8 = x \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$ (ligningen er løst vha. nSpire: $Solve(-x^2 + 6x - 8 = 0, x)$).

Sætning 6 kan nu anvendes:

$$A = \int_2^4 f_1(x) - f_2(x)\,dx = \int_2^4 (-x^2 + 7x - 8) - x\,dx = \int_2^4 -x^2 + 6x - 8\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - 8x\right]_2^4 = -\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 - 8\cdot 4 - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - 8\cdot 2\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

Eksempel 8: Arealet af punktmængden: $M = \{(x,y) \,|\, 3 \le x \le 4 \wedge f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$, hvor $f_1(x) = -x^2 + 7x - 8$ og $f_2(x) = x$ som i eksempel 7, ønskes bestemt (se figur 5).



Figur 5.

Sætning 6 kan anvendes og vi får, at:

$$A(M) = \int_3^4 f_1(x) - f_2(x)\,dx = \int_3^4 (-x^2 + 7x - 8) - x\,dx = \int_3^4 -x^2 + 6x - 8\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - 8x\right]_3^4 = -\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 - 8\cdot 4 - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 3^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 3^2 - 8\cdot 3\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$