Differentialregning

Definition

Funktionen *f* siges at være differentiabel i x_0 hvis følgende grænseværdien findes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Denne grænseværdi kaldes differentialkvotienten for *f* i x_0 og benævnes $f'(x_0)$.

Tallet $f'(x_0)$ er hældningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $(x_0, f(x_0))$.

$f'(x_0)$ læses som "*f* mærke af x_0

En Ligning for **tangenten** til grafen for *f* i punktet $(x_0, f(x_0))$ bestemmes ved hjælp af følgende ligning:

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Tabellen:

$f(x)$	$ax+b$	x	ax^2+bx+c	k	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	a	1	$2ax+b$	0	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	e^x	e^{kx}	a^x	$\ln(x)$	
$f'(x)$	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	$k \cdot e^{kx}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$\frac{1}{x}$	

Husk: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ **og** $x = x^1$

Regneregler:

Sum: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Differens: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Gange en konstant: $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

Produkt: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Kvotient: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Sammensat funktion: $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Eks.

En ligning for tangenten til grafen for $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ i punktet $(-1, f(-1))$ ønskes bestemt.

Vi indsætter $x_0 = -1$ i tangentens ligning:

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

og udregner $f'(-1)$ samt $f(-1)$.

For at bestemme $f'(-1)$ bestemmes først $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x + 4 = 6x + 4,$$

$x_0 = -1$ indsættes:

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1) + 4 = -2.$$

Vi skal desuden udregne $f(-1)$:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Tallene $f'(-1) = -2$ og $f(-1) = 0$ indsættes i $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$:

$$y=-2\cdot(x-(-1))+0\Leftrightarrow$$
$$y=-2\cdot(x+1)\Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{y=-2x-2}}$$